1. Η κινηματική της απλής αρμονικής ταλάντωσης

1.7.4 γ	1.7.5 δ	1.7.6 γ	1.7.7 β
1.7.8 δ	1.7.9 γ	1.7.10 α	1.7.11 γ

1.7.12. Σωστό

1.7.13. όχι, μπορεί να έχει $\upsilon<0$, οπότε $\varphi_0=\pi$

1.7.14. $y=0{,}5\sigma\upsilon\nu(10\pi t)$ ή $y=0{,}5\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$. Λάθος· Την $t=0$ έχει $y=+0{,}5m$ και $\upsilon=0$, άρα έχει αρχική φάση $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$

1.7.15. $x=A\eta\mu(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0)$ ή $A=A\eta\mu(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}+\varphi_0)$ ή $\eta\mu(\frac{\pi}{3}+\varphi_0)=1$ ή $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$

1.7.16.

x	$-A$	$x=0$	$x=0$	$+A$
υ	0	$\upsilon>0$	$\upsilon<0$	0
φ_0	$3\pi/2$	0	π	$\pi/2$

1.7.17

x	$+A/2$	$+A/2$	$-A/2$	$-A/2$
υ	$\upsilon>0$	$\upsilon<0$	$\upsilon<0$	$\upsilon>0$
φ_0	$\pi/6$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$11\pi/6$

1.7.18 Την $t=0$ έχουμε $\upsilon=0$ και μετά αυξάνεται θετικά, άρα για $t=0$ έχουμε $x=-A$ και $\alpha=+\alpha_0$. Η καμπύλη (β) την $t=0$ αρχίζει από τη μέγιστη θετική τιμή άρα αντιστοιχεί στην $\alpha=f(t)$. Σωστή η πρόταση (β)

$\upsilon=\upsilon_0\eta\mu(\omega t)$ ή $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t-\pi/2)$ ή $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\frac{3\pi}{2})$

$x=A\eta\mu(\omega t+\frac{3\pi}{2})$ και $\alpha=-\alpha_0\eta\mu(\omega t+\frac{3\pi}{2})$ ή $\alpha=\alpha_0\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{2})$

1.7.19 "Όχι" Από τις γραφικές παραστάσεις φαίνεται ότι $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ και $\alpha=\alpha_0\eta\mu(\omega t)$, αν ανήκαν στον ίδιο ταλαντωτή θα έπρεπε $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ και $\alpha=-\alpha_0\eta\mu(\omega t)$.

1.7.20. Για τον ταλαντωτή Α έχουμε $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ και $x=A\eta\mu(\omega t)$ άρα δεν έχει αρχική φάση φ_0.

Για τον ταλαντωτή Β έχουμε $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$ και την $t_0=0$, $\frac{\upsilon_0}{2}=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi_0$ από όπου $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$ και $\varphi_0=\frac{5\pi}{3}$. Επειδή την $t=0$ έχουμε $\upsilon>0$ και αυξάνεται θα έχουμε και $x<0$, άρα

.δεκτή η $\varphi_0 = 5\pi/3$, έτσι $x = A\eta\mu(\omega t + \frac{5\pi}{3})$

Συμπέρασμα. α-λάθος, ο ταλαντωτής Α δεν έχει αρχική φάση

β-λάθος, ο ταλαντωτής Β έχει αρχική φάση $\varphi_{0B} = \frac{5\pi}{3} > \varphi_{0A} = 0$

Σημείωση: Δεχόμαστε αρχικές φάσεις $0 \le \varphi_0 < 2\pi$.

1.7.21. $x=0{,}4\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$, $v=4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$, $\alpha=-400\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$

1.7.22. $x=0{,}2\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\pi)$ ή $x=0{,}2\eta\mu(10\pi t+\frac{3\pi}{2})$

$v=2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{3\pi}{2})$ και $\alpha=-200\eta\mu(10\pi t+\frac{3\pi}{2})$

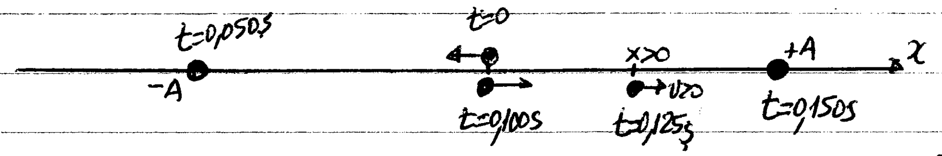
1.7.23 $x=0{,}2\eta\mu(5\pi t+\frac{3\pi}{2})$, $v=\pi\sigma\upsilon\nu(5\pi t+\frac{3\pi}{2})$, $\alpha=-50\eta\mu(5\pi t+\frac{3\pi}{2})$

1.7.24. $v_0=6{,}28$ ή $\omega A=2\pi$ ή $10\pi A=2\pi$ ή $A=0{,}2m$

α) $x=0{,}2\eta\mu(10\pi t+\pi)$, $\alpha=-200\eta\mu(10\pi t+\pi)$

β.1) $x>0$ β.2) $v>0$ β.3) Από το κέντρο προς τα άκρα

Αυτά τα προβλήματα απαντώνται εύκολα αν δούμε σε ποια θέση πάνω στον άξονα ταλάντωσης βρίσκεται ο ταλαντωτής την αντίστοιχη χρονική στιγμή. $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ή $T=0{,}200s$

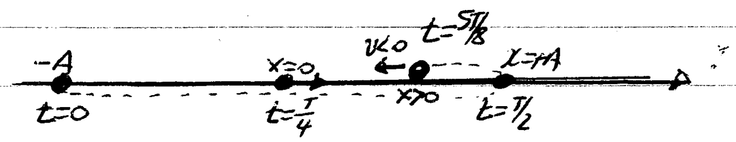


1.7.25. α) $v=12{,}56\eta\mu(\frac{2\pi}{0{,}2}t)=12{,}56\eta\mu(10\pi t)$ ή $v=12{,}56\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{3\pi}{2})$

$v_0=\omega A$ ή $12{,}56=10\pi A$ ή $A=0{,}4m$

$x=0{,}4\eta\mu(10\pi t+\frac{3\pi}{2})$ και $\alpha=-400\eta\mu(10\pi t+\frac{3\pi}{2})$

β)



β.1) $x>0$ β.2) Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται β.3) $\alpha<0$

β.4) Το μέτρο της επιτάχυνσης μειώνεται

1.7.26. α) $\alpha=400\eta\mu(10\pi t-\frac{\pi}{2})$ ή $\alpha=-400\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$

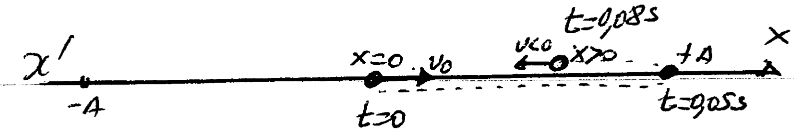
$\alpha_0=\omega^2A$ ή $400=(10\pi)^2A$ ή $A=0{,}4m$

$x=0{,}4\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$ και $v=4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$

γ) $\alpha=-\omega^2x$ ή $\alpha=-1000x$

1.7.27. α) $\alpha=-200\eta\mu(10\pi t)$, $\alpha_0=\omega^2A$ ή $200=100\pi^2A$ ή $A=0{,}2m$

$x=0{,}2\eta\mu(10\pi t)$, $v=2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t)$



β.1) $x>0$ β.2) Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται β.3) ο ταλαντωτής κινείται προς το κέντρο.

1.7.28 $\alpha_0=\omega^2 A$ ή $800=\omega^2\cdot 0,2$ ή $80\pi^2=\omega^2 0,2$ ή $\omega^2=400\pi^2$ ή $\omega=20\pi$.

Επειδή την $t=0$ έχουμε $\upsilon=0$ και $\alpha=-\alpha_0$ ... $x=+A$ και $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$.

$x=0,2\eta\mu(20\pi t+\frac{\pi}{2})$, $\upsilon=4\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t+\frac{\pi}{2})$, $\alpha=-800\eta\mu(20\pi t+\frac{\pi}{2})$.

1.7.29. α) $\upsilon=4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\pi)$, $\alpha=-40\pi^2\eta\mu(10\pi t+\pi)$

β) ... $\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ ή $\upsilon=\pm 10\pi\sqrt{0,16-x^2}$

γ) ... $\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^2+\left(\frac{x}{A}\right)^2=1$ ή $\left(\frac{\upsilon}{4\pi}\right)^2+\left(\frac{x}{0,4}\right)^2=1$ ... έλλειψη.

1.7.30 α) $x=0,50\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\xrightarrow{t=0}0,25=0,50\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}$ οπότε $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ και $\varphi_0=\frac{5\pi}{6}$. Επειδή την $t=0$ $x>0$ και $\upsilon>0$ ... δεκτή η $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$

Επίσης $x=0,50\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6})\xrightarrow{t=1s}0,50=0,50\eta\mu(\omega\cdot 1+\frac{\pi}{6})$ ή

$\eta\mu(\omega\cdot 1+\frac{\pi}{6})=1$ ή $\omega=\frac{\pi}{3}$ ή $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ή $T=6s$

β) $x=0,50\eta\mu(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})$, $\upsilon=\frac{0,5\pi}{3}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})$, $\alpha=-\frac{0,5\pi^2}{9}\eta\mu(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})$

1.7.31 α) $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ ή $x=0,4\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$

$\frac{T}{4}=3s$ ή $T=12s$ ή $\omega=\frac{2\pi}{T}$ ή $\omega=\frac{\pi}{6}$ rad/s

Για $t=1s$ παίρνουμε $0,4=0,4\eta\mu(\omega\cdot 1+\varphi_0)$ ή

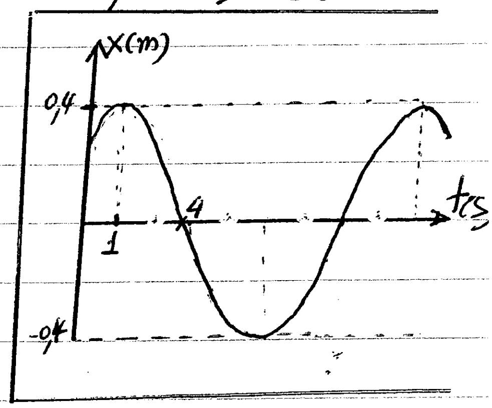
$\eta\mu(\frac{\pi}{6}+\varphi_0)=1$ ή $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$

β) $f=\frac{1}{T}$ ή $f=\frac{1}{12}$ Hz

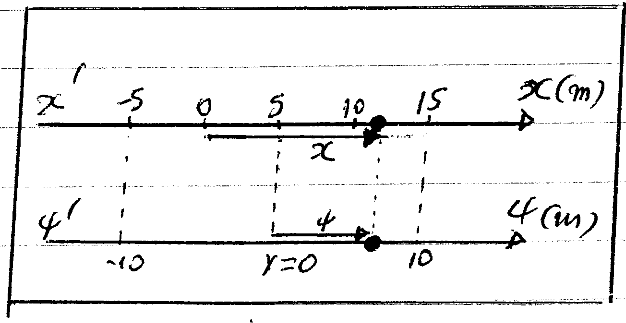
γ) $x=0,4\eta\mu(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})$

$\upsilon=\frac{0,4\pi}{6}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})$

$\alpha=-\frac{0,4\pi^2}{36}\eta\mu(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})$



1.7.32. α) Ο ταλαντωτής εκτελεί ταλάντωση στον x'x με πλάτος $A=10m$ και περίοδο $T=2s$ ή $\omega=\frac{2\pi}{T}$ ή $\omega=\pi$ rad/s



β) Το κέντρο της ταλάντωσης στον x'x είναι στη θέση $x=+5m$ όπου προφανώς έχει και τη μέγιστη ταχύτητα.

γ) Στο σχήμα εκτός από τον άξονα $x'x$ (που δεν είναι άξονας ταλάντωσης) φαίνεται και ο άξονας ταλάντωσης $\psi'\psi$ με το $\psi=0$ στη θέση ισορροπίας. Για τον άξονα ταλάντωσης γράφουμε $\psi=10\eta\mu(\pi t)$ και επειδή $x=5+\psi$ η $x=f(t)$ έχει τη μορφή $x=5+10\eta\mu(\pi t)$

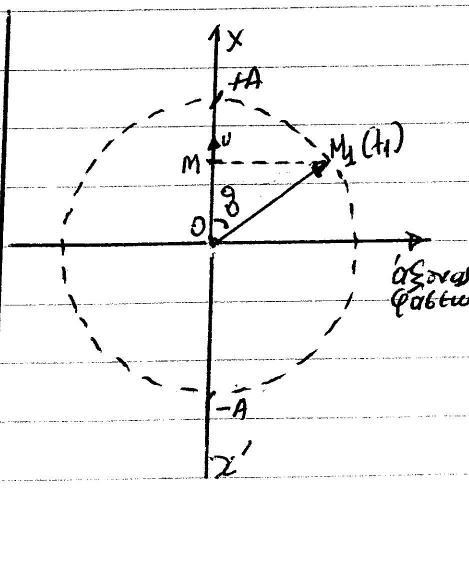
1.9.5 β 1.9.6 β 1.9.7 δ 1.9.8 γ 1.9.9 δ 1.9.10 δ
1.9.11 δ 1.9.12 β 1.9.13 β 1.9.14 α 1.9.15 δ 1.9.16 γ
1.9.17 γ 1.9.18 γ 1.9.19 β 1.9.20 α 1.9.21 γ 1.9.22 δ
1.9.23 δ 1.9.24 γ 1.9.25 δ 1.9.26 Α-γ, Β-γ, Γ-δ
1.9.27 γ 1.9.28 Α-γ, Β-β
1.9.29

x	$-A$	0	$+A$
υ	0	$\pm\omega A$	0
α	$+\omega^2 A$	0	$-\omega^2 A$
F	$+m\omega^2 A$	0	$-m\omega^2 A$

1.9.30 α) Λάθος, $\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ ή $\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-(A/2)^2}$ ή $\upsilon=\pm\omega\frac{A\sqrt{3}}{2}$ ή $\upsilon=\pm\upsilon_0\frac{\sqrt{3}}{2}$
β) Σωστό, $\alpha=-\omega^2x=-\omega^2(-A/2)$ ή $\alpha=\frac{\omega^2A}{2}$ ή $\alpha=\frac{\alpha_0}{2}$

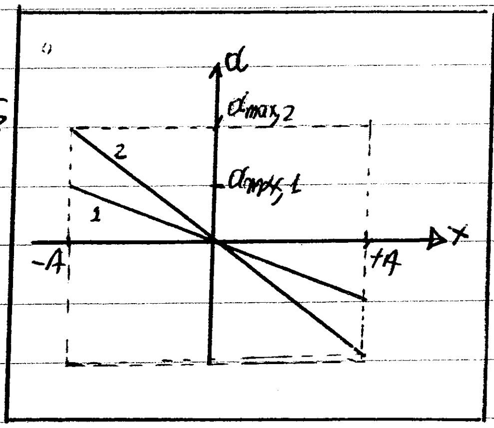
1.9.31 α) $x=A\eta\mu\varphi$ ή $x=A\eta\mu(2\kappa\pi+\frac{\pi}{6})$ ή $x=A/2$, άρα $\alpha=-\omega^2x$ ή $\alpha=-\omega^2\frac{A}{2}$ ή $\alpha=-\frac{\alpha_0}{2}$. Η πρόταση είναι σωστή
β) $\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\frac{\pi}{6})$ ή $\upsilon=\upsilon_0\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\frac{\upsilon_0}{2}$, άρα η πρόταση είναι λάθος
γ) Όχι σίγουρα, θα ήταν $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ αν η $\varphi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ήταν τη χρονική στιγμή $t=0$ ή $t=\kappa T$.

1.9.32. Τη χρονική στιγμή t_1 ο ταλαντωτής είναι στη θέση $x=A\eta\mu\varphi=A\eta\mu(2\kappa\pi+\frac{\pi}{3})$ ή $x=A\frac{\sqrt{3}}{2}$ με ταχύτητα $\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu\varphi>0$
$\overset{\Delta}{OMM_1} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{A\sqrt{3}/2}{A}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\theta=\frac{\pi}{6}$
$\theta=\omega\Delta t$ ή $\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t$ ή $\Delta t=\frac{T}{12}$
Σωστή η πρόταση (δ)



1.9.33 Λάθος, ισχύει και όταν υπάρχει $\varphi_0 \neq 0$. Έστω $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, όταν $x = \pm A$, $\eta\mu(\omega t_1 + \varphi_0) = \pm 1$ και προφανώς $\sigma\upsilon\nu(\omega t_1 + \varphi_0) = 0 \; (1)$
Εκείνη τη στιγμή $\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t = t_1} \upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t_1 + \varphi_0) \xrightarrow{(1)} \upsilon = 0$

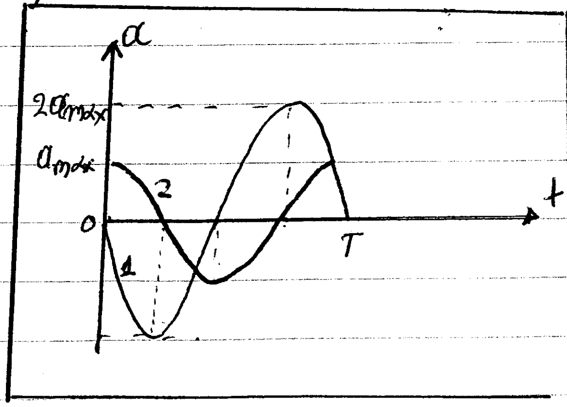
1.9.34. Λάθος, ισχύει και όταν υπάρχει $\varphi_0 \neq 0$. Έστω $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, οπότε $\alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ και $\Sigma F = m\alpha$ ή $\Sigma F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ ή $\Sigma F = -D\left[A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\right]$ ή $\Sigma F = -D \cdot x$



1.9.35. α) $\alpha_{max,2} > \alpha_{max,1}$ ή $\omega_2^2 A > \omega_1^2 A$ ή $\omega_2^2 > \omega_1^2$ ή $\omega_2 > \omega_1$ ή $\frac{2\pi}{T_2} > \frac{2\pi}{T_1}$ ή $T_2 < T_1$ ή $T_1 > T_2$
Άρα η πρόταση (α) είναι λάθος
β) $\frac{\upsilon_{0,1}}{\upsilon_{0,2}} = \frac{\omega_1 A}{\omega_2 A} \xrightarrow{\omega_2 > \omega_1} \upsilon_{0,2} > \upsilon_{0,1}$ Άρα η πρόταση (β) είναι σωστή.

1.9.36. Λάθος, σωστό είναι το διάγραμμα (β). Η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους και εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του ταλαντωτή.

1.9.37. α) Σωστό, αφού όπως φαίνεται από το σχήμα έχουν την ίδια περίοδο
β) $\alpha_{1,max} = 2\alpha_{2,max}$ ή $\omega^2 A_1 = 2\omega^2 A_2$ ή $A_1 = 2A_2$
$\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}} = \frac{\omega A_1}{\omega A_2} = \frac{2A_2}{A_2} = 2$ ή $\upsilon_{01} = 2\upsilon_{02}$, άρα η πρόταση είναι σωστή

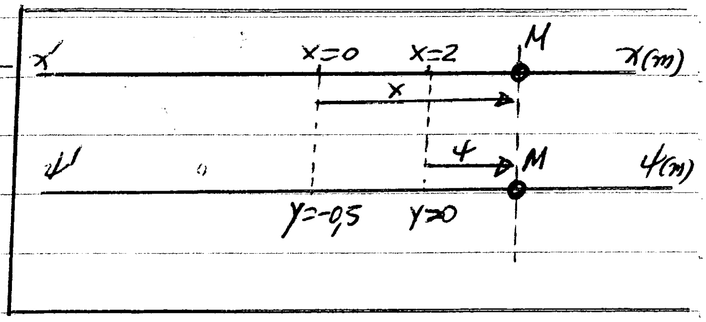


γ) $\alpha_1 = -\alpha_{1,max}\eta\mu(\omega t)$
$\alpha_2 = -\alpha_{2max}\sigma\upsilon\nu(\omega t) = -\alpha_{2max}\eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2})$
$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t)$
$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2})$
Άρα ο (2) προηγείται του (1) κατά $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$

1.9.38 Λάθος, στην α.α.τ $\upsilon \neq$ σταθ αλλά $\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$
1.9.39. Όχι, διότι η δύναμη επαναφοράς είναι $\Sigma F = -mg\eta\mu\varphi =$ σταθερή και όχι της μορφής $\Sigma F = -Dx$

1.9.40. Προσοχή (!!!) εκτελεί α.α.τ. Άλλο ο τυχαίος άξονας κίνησης $x'x$ (το x δεν είναι απομάκρυνση) και άλλο ο άξονας ταλάντωσης $y'y$ που έχει $y=0$ στη θέση ισορροπίας (και η συντεταγμένη y είναι η απομάκρυνση), εκεί όπου $\Sigma F=0$ ή $10-5x=0$ ή $x=2m$

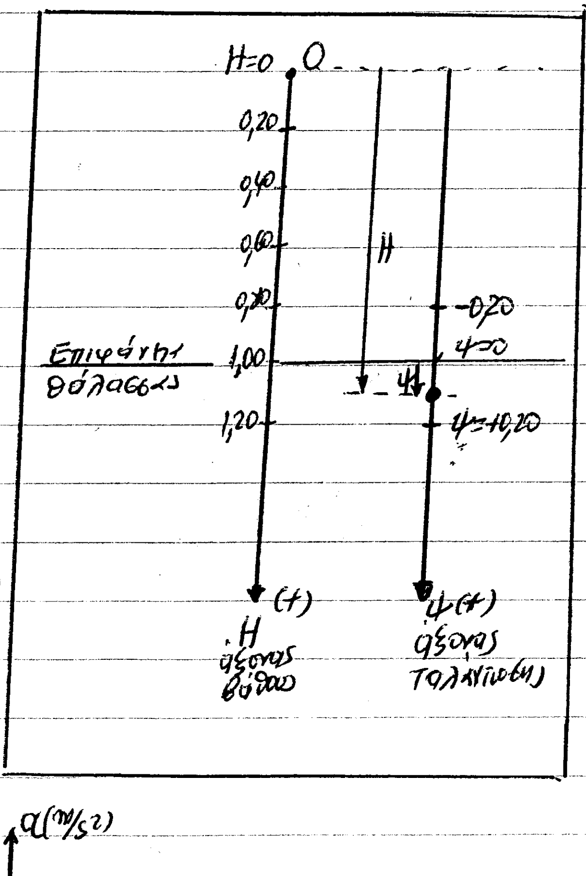
Για μια τυχαία θέση M η απομάκρυνση y και η συντεταγμένη x συνδέονται με τη σχέση $x=0,5+y$.
Για να εκτελεί α.α.τ πρέπει $\Sigma F=-Dy$ και όχι $\Sigma F=-Dx$



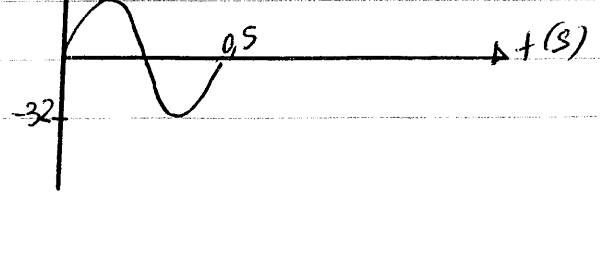
Στην τυχαία θέση με η δύναμη επαναφοράς είναι $\Sigma F=10-5x$ ή $\Sigma F=10-5(2+y)$ ή $\boxed{\Sigma F=-5\cdot y}$, άρα έχουμε α.α.τ με $D=5\ N/m$. Αν δεν υπάρχει αρχική φάση $y=A\eta\mu(\omega t)$ και $x=2+A\eta\mu(\omega t)$

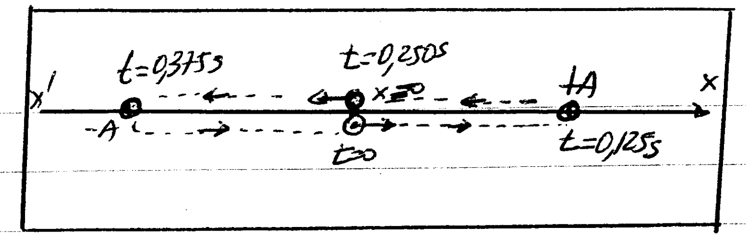
1.9.41. A) $f=\frac{N}{t}=\frac{25}{10}$ ή $f=2,5Hz$ και $T=\frac{1}{f}$ ή $T=0,4s$. Επίσης $A=0,20m$.

B) Από τα σχήματα φαίνεται ότι $H=1+y$ με $y=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ με $\omega=\frac{2\pi}{T}=5\pi\frac{rad}{s}$ και $A=0,2m$ δηλ.
$y=0,20\eta\mu(5\pi t+\frac{3\pi}{2})$ (SI) και $H=1+y$
ή $H=1+0,20\eta\mu(5\pi t+\frac{3\pi}{2})$ SI



1.9.42. $T=0,5s$ ή $\omega=4\pi\frac{rad}{s}$, $\alpha_0=\omega^2 A$ ή $32=16\pi^2 A$
ή $A=0,2m$, $\upsilon_0=\omega A=0,8\pi\ m/s$
$F_0=m\alpha_0=1,6N$, άρα
$\alpha=32\eta\mu(4\pi t)$ ή $\alpha=-32\eta\mu(4\pi t+\pi)$
$x=0,2\eta\mu(4\pi t+\pi)$
$\upsilon=0,8\pi\ \sigma\upsilon\nu(4\pi t+\pi)$
$F=-1,6\eta\mu(4\pi t+\pi)$





1.9.43. α) $a=-\omega^2 A$ στη θέση $x=+A$ την χρονική στιγμή $t=0{,}125s$
β) $F=+m\omega^2 A$ στη θέση $x=-A$ τη χρονική στιγμή $t=0{,}375s$ γ) $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0{,}250s$

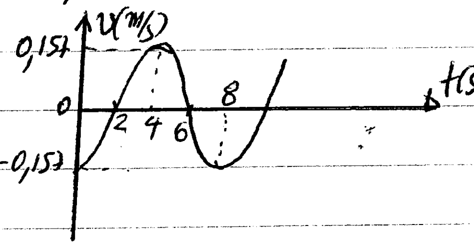
1.9.44 α) $v_0=\omega A \Rightarrow 100\pi=200\pi A \Rightarrow A=0{,}5m$. $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{200\pi} \Rightarrow T=0{,}01s$
β) $x=0{,}5ημ(200\pi t+\frac{\pi}{3})$ και $a=-2\cdot10^5ημ(200\pi t+\pi/3)$ (SI)
γ) $\Sigma F=-m\omega^2 x \Rightarrow \Sigma F=-4\cdot10^4 x$ (SI).

1.9.45. $v=100\pi ημ(100\pi t+\pi) \Rightarrow v=100\pi συν(100\pi t+\frac{\pi}{2})$, $v_0=\omega A \Rightarrow 100\pi=100\pi A$ $\Rightarrow A=1m$, άρα $x=1ημ(100\pi t+\frac{\pi}{2})$ και $a=-10^5ημ(100\pi t+\frac{\pi}{2})$ SI

1.9.46 α) $a=-100ημ(10t+\frac{\pi}{2})$, $a_0=\omega^2 A \Rightarrow 100=100A \Rightarrow A=1m$
$x=1ημ(10t+\frac{\pi}{2})$, $v=10συν(10t+\frac{\pi}{2})$
β) $a=-\omega^2 x \Rightarrow a=-80m/s^2$ γ) $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2} \Rightarrow v=\pm8m/s$
δ) $p=mv \Rightarrow p=\pm1{,}6\,kg\,m/s$, $\frac{dp}{dt}=\Sigma F=-Dx=-m\omega^2 x \Rightarrow \frac{dp}{dt}=-12\,kg\,m/s^2$

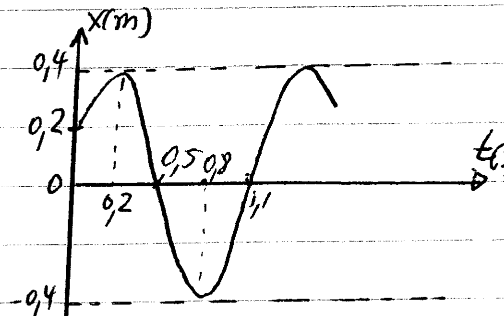
1.9.47 (βλέπε 1.8.Α και 1.8.Β)

1.9.48 α) $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$, $v=-0{,}157συν(\frac{\pi}{4}t) \Rightarrow v=0{,}157συν(\frac{\pi}{4}t+\pi)$
$v_0=\omega A \Rightarrow 0{,}157=\frac{\pi}{4}A \Rightarrow A=0{,}2m$
β) $v=0{,}157συν(\frac{\pi}{4}t+\pi)$ και $x=0{,}2ημ(\frac{\pi}{4}t+\pi)$ (SI)
γ) $(t=0, x=0)$, $(t=2s, x=-0{,}2m)$
$(t=4s, x=0)$, $(t=6s, x=+0{,}2m)$
$(t=8s, x=0)$



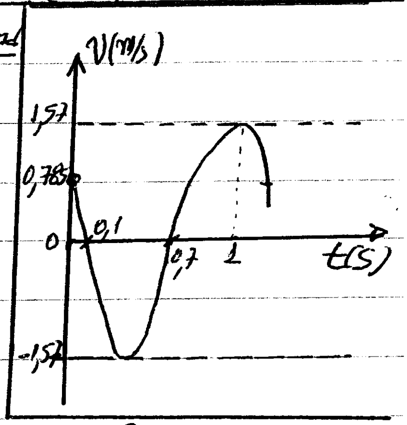
δ) Τη $t=3s$ έχουμε: $x<0$, $v>0$ κινείται από το άκρο προς το κέντρο

1.9.49 α) $x=Aημ(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{t=0} 0{,}2=0{,}4ημ\varphi_0$
$\Rightarrow ημ\varphi_0=\frac{1}{2}$ άρα $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ (δεκτή) ή $\varphi_0=\frac{5\pi}{6}$
β) $x=0{,}4ημ(\omega t+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{t=0{,}2}$
$0{,}4=0{,}4ημ(\omega\cdot0{,}2+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \omega=\frac{5\pi}{3}$ και
$T=\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T=1{,}2s$ και $x=0{,}4ημ(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})$
γ) $v=\frac{2\pi}{3}συν(\frac{5\pi}{6}t+\frac{\pi}{6})$ και
$a=-\frac{10\pi^2}{9}ημ(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})$



γ) $υ=0$ τις χρονικές στιγμές $t=0,2s$ και $t=0,8s$ (...επειδή όπου $x=\pm A$)
$α=0$ τις χρονικές στιγμές $t=0,5s$ και $t=1,1s$ (...επειδή όπου $x=0$)
ε) Από το διάγραμμα $x=f(t)$ φαίνεται ότι την $t=0,6s$ ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση $x<0$ και κινείται προς τα αρνητικά $(υ<0)$

1.9.50 α) $\frac{T}{4}=0,3s$ ή $T=1,2s$ β) $ω=\frac{2π}{T}$ ή $ω=\frac{5π}{3}\,\frac{rad}{s}$



$υ_0=ωA$ ή $1,57=\frac{5π}{3}A$ ή $A=0,3m$
γ) $α_0=ω^2A$ ή $α_0=\frac{7,5π^2}{9}\,m/s^2$
δ) $υ=0$ τις $t=0,1s$ και $t=0,7s$
ε) $υ=υ_0συν(ωt+φ_0)$ $\xrightarrow{t=0}$ $0,785=1,57συνφ_0$ ή $συνφ_0=\frac{1}{2}$
άρα $φ_0=\frac{π}{3}$ και $φ_0=\frac{5π}{3}$. Την $t=0$ έχουμε $υ>0$ που μειώνεται ...άρα $x>0$, ... αυτό ισχύει μόνο για $φ_0=\frac{π}{3}$, $υ=1,57συν(\frac{5π}{3}t+\frac{π}{3})$ και $α=-\frac{7,5π^2}{9}ημ(\frac{5π}{3}t+\frac{π}{3})$
ζ) $x=0$, τις χρονικές στιγμές $t=0,4s$ και $t=1,0s$ (...όταν $υ_{max}$)
η) Την $t=0,8s$ από το $υ=f(t)$ παρατηρούμε ότι $υ>0$ και αυξάνεται άρα $x<0$ με φορά κίνησης από το άκρο προς το κέντρο.

1.9.51 α) $x=5\cdot10^{-2}ημ(200πt+\frac{π}{2})$, $υ=31,4συν(200πt+\frac{π}{2})$, $α=-2\cdot10^4ημ(200πt+\frac{π}{2})$
β) $α=α_{max}=-2\cdot10^4\,m/s^2$ γ) $υ=-31,4\,m/s$ δ) $υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $υ=25,12\,m/s$

1.9.52

x	-0,4m	0	+0,4m
υ	0	±4m/s	0
α	+40m/s²	0	-40m/s²
ΣF	+20N	0	-20N

1.9.53

	1	2	3
X(m)	-0,3m	x=0	+0,4
υ(m/s)	±0,8	±1	±0,6
α(m/s²)	1,2	0	α<0, -1,6
ΣF(N)	+0,6	0	-0,8

$υ_0=ωA$ ή $ω=2\,rad/s$
$α_0=ω^2A$ ή $α_0=2\,m/s^2$
Στήλη 1. $ΣF=mα$ ή $α=\frac{ΣF}{m}$
ή $α=\frac{0,6}{0,5}$ ή $α=1,2\,m/s^2$

$α=-ω^2x$ ή $1,2=-4\cdot x$ ή $x=-0,3m$
$υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $υ=\pm0,8\,m/s$
Στήλη 3 $υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $x=\pm0,4m$ $\xrightarrow{α<0}$ $x=+0,4m$
$α=-ω^2x=-4\cdot0,4 \Rightarrow α=-1,6\,m/s^2$
$ΣF=mα$ ή $ΣF=-0,8N$

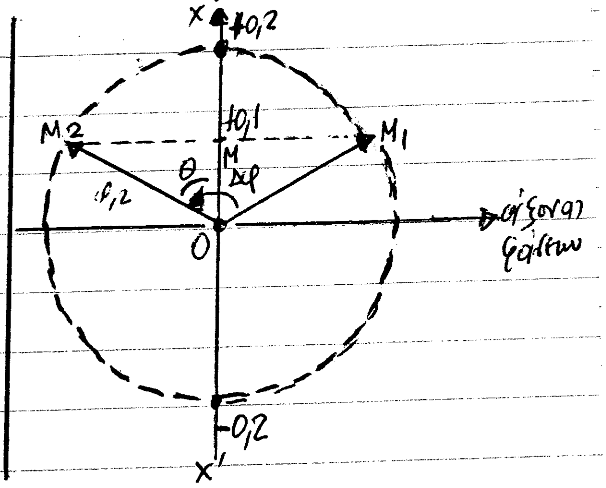
1.9.54 α) $x=0,2ημ(100πt+\frac{5π}{6})$, $υ=20π\,συν(100πt+\frac{5π}{6})$

β) $x=-0,1m$

1.9.55 α) $x=0,2ημ(ωt+φ_0) \xrightarrow{t=0} 0,1=0,2ημφ_0$ ή $ημφ_0=\frac{1}{2}$ και $φ_0=\frac{π}{6}$ ή $φ_0=\frac{5π}{6}$

δεκτή ... η $φ_0=\frac{π}{6}$. $x=0,2ημ(ωt+φ_0)$ ή $0,1=0,2ημ(ω\cdot 0,2+\frac{π}{6})$

ή $(ω\cdot 0,2+\frac{π}{6})=5π/6$ ή $ω=\frac{10π}{3}rad/s$ ... και διαφορετικά με στρεφόμενο διάνυσμα.



Ο χρόνος $Δt=0,2s$ ισούται με το χρόνο στροφής του διανύσματος από τη θέση OM_1 στη θέση OM_2

$Δφ=ωΔt$ ή $ω=\frac{Δφ}{Δt} \Rightarrow ω=\frac{2π/3}{0,2}$ ή $ω=\frac{10π}{3}rad/s$

$(... συνθ=\frac{OM}{OM_2}=\frac{0,1}{0,2}=\frac{1}{2}$ ή $θ=\frac{π}{3}$ ... $Δφ=2θ=\frac{2π}{3})$

$ω=2πf$ ή $f=\frac{10π/3}{2π}$ ή $f=\frac{5}{3}Hz$

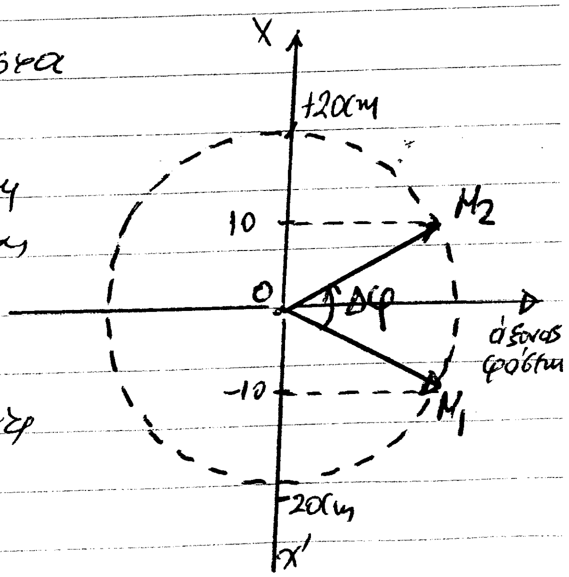
β) $x=0,2ημ(\frac{10π}{3}t+\frac{π}{6})$ και $υ=\frac{2π}{3}συν(\frac{10π}{3}t+\frac{π}{6})$ (S.I.)

γ) $x=0,2ημ(\frac{10πt}{3}+\frac{π}{6})$ ή $-0,2=0,2ημ(\frac{10πt}{3}+\frac{π}{6})$ ή $\frac{10πt}{3}+\frac{π}{6}=\frac{3π}{2}$ ή

ή $t=0,4s$

1.9.56 ... εύκολα με στρεφόμενο διάνυσμα

Ο χρόνος για να βρεθεί ο ταλαντωτής από τη θέση $x=-10cm$ στη θέση $x=+10cm$ ισούται με το χρόνο που απαιτείται ώστε το στρεφόμενο διάνυσμα να κινηθεί από τη θέση OM_1 στη θέση OM_2 δηλ. να διαγράψει τη γωνία $Δφ=\frac{π}{3}$



$Δφ=ωΔt$ ή $Δt=\frac{Δφ}{ω}=\frac{Δφ}{2π/T}$ ή

$Δt=\frac{π/3}{2π}\cdot 0,6$ ή $\boxed{Δt=0,1s}$

1.9.57 α) $v=\frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu(\frac{10\pi t}{3}+\frac{\pi}{3})$ β) $\alpha=-\omega^2 x$ ή $\alpha=-\frac{16}{9}\pi^2$ m/s²

$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ ή $v=\pm\frac{10\pi}{3}\sqrt{0{,}20^2-0{,}16^2}$ ή $v=\pm\frac{1{,}2\pi}{3}$ m/s

γ) $\Delta\varphi=\omega\Delta t$ ή $\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}\Delta t$ ή $\Delta t=0{,}1$ s ... στρεφόμενο διάνυσμα

δ) Για $t=\frac{1}{20}$ s έχουμε $v_1=0$ και για $t=\frac{5}{20}$ s έχουμε $v_2=-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ m/s

άρα $\Delta P=P_2-P_1=mv_2-mv_1$ ή $\Delta P=mv_2$ ή $\Delta P=-\frac{\pi\sqrt{3}}{30}$ kg m/s

1.9.58 α) $x=0{,}2\eta\mu(\pi t)$, $v=0{,}2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi t)$ ή $v=0{,}628\sigma\upsilon\nu(\pi t)$

και $\alpha=-2\eta\mu(\pi t)$ (S.I.)

β) $x=0{,}1$ m, $v=0{,}314\sqrt{3}$ m/s, $\alpha=-1$ m/s²

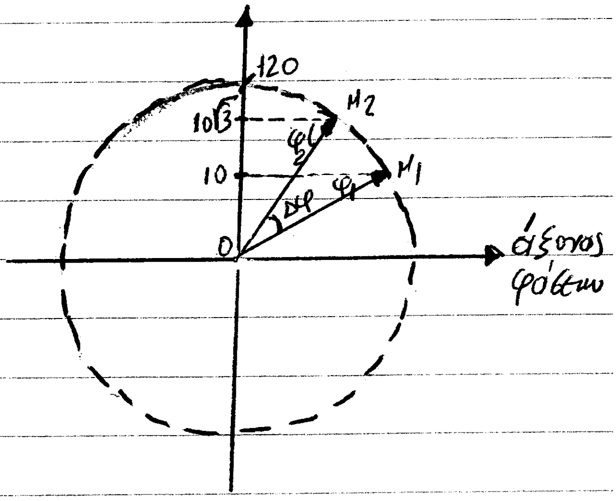
γ) $v=\pm0{,}12\pi$ ή $v=\pm0{,}3768$ m/s δ) ... με στρεφόμενο διάνυσμα.

$\eta\mu\varphi_2=\frac{10\sqrt{3}}{20}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$

$\eta\mu\varphi_1=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ ή $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$

$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{6}$, άρα $\Delta\varphi=\omega\Delta t$ ή

$\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{12}$ ή $\Delta t=\frac{1}{6}$ s



1.9.59

α) v_{max} τη $t=0$ s και $t=6$ s

α_{max} τη $t=3$ s και $t=9$ s

β) F_{max} τη $t=3$ s και $t=9$ s

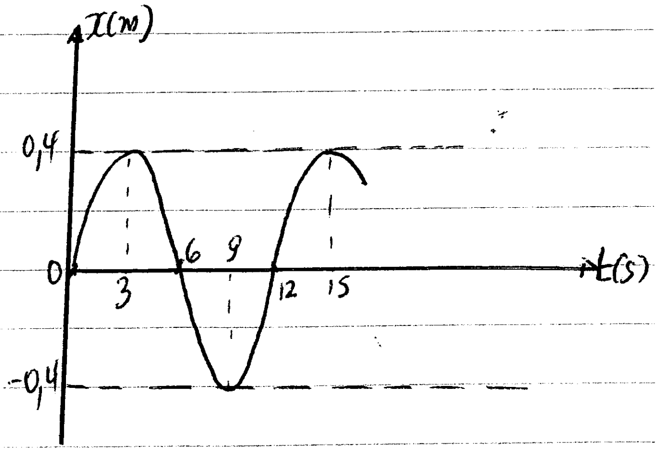
$F=0$ τη $t=0$ και $t=6$ s

γ) Την $t=5$ s, $x>0$, $v<0$, $\alpha<0$

δ) $x=0{,}4\eta\mu(\frac{\pi}{6}t)$.

$v=0{,}209\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}t)$...

$\alpha=-\frac{1}{9}\eta\mu(\frac{\pi}{6}t)$



ε) $\Sigma F=m\alpha$ ή $\Sigma F=-\frac{1}{45}\eta\mu(\frac{\pi}{6}t)$ (S.I.)

1.9.60 α) $\alpha=\omega^2 x$ ή $\omega=\sqrt{\frac{\alpha}{x}}$ ή $\omega=4$ rad/s άρα $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ή $T=1{,}57$ s

$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ ή $v^2=\omega^2(A^2-x^2)$ ή $A=0{,}75$ m

β) $x=0,15ημ(4t)$ SI   γ) Λ, Σ, Λ, Σ   δ) $ΣF=-Dx=-mω^2x$
ή $ΣF=-8x$ (SI)

1.9.61 α) Την $t=0$ έχουμε $υ=0$ άρα ο ταλαντωτής είναι στο άκρο της ταλάντωσης, $A=0,2m$ και $α=α_{max}=-ω^2A$ ή $-0,8=-ω^2 0,2$ ή $ω=2\,rad/s$ και $T=\frac{2π}{ω}$ ή $T=\frac{2π}{2}$ ή $T=π\,s$

β) $x=0,2ημ(2t+\frac{π}{2})$ και $υ=0,4συν(2t+\frac{π}{2})$
γ) $υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $υ=\pm 0,32\,m/s$
$α=-ω^2x=-4\cdot(-0,12)$ ή $α=0,48\,m/s^2$ ή $\frac{dυ}{dt}=0,48\,m/s^2$

1.9.62 α) $F_{max}=DA$ ή $D=50\,N/m$, $D=mω^2$ ή $ω=\sqrt{D/m}=\sqrt{50/0,5}\,rad/s$ ή $ω=10\frac{rad}{s}$ και $T=\frac{2π}{ω}$ ή $T=0,2π\,s$
β) $ΣF=-Dx$ ή $ΣF=-10x$
γ) $x=0,5ημ(10t+\frac{π}{2})$ και $ΣF=-Dx$ ή $ΣF=-25ημ(10t+\frac{π}{2})$
δ) $ΣF=-12,5N$ ε) $\frac{dp}{dt}=ΣF=-Dx$ ή $\frac{dp}{dt}=-15\,kg\,m/s^2$

1.9.63 α) $A=0,10m$ β) $x=Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow{t=0} 5\sqrt{3}=10ημφ_0$ ή $ημφ_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $φ_0=\frac{π}{3}$ ή $φ_0=\frac{2π}{3}$ (δεκτή διότι $υ<0$)

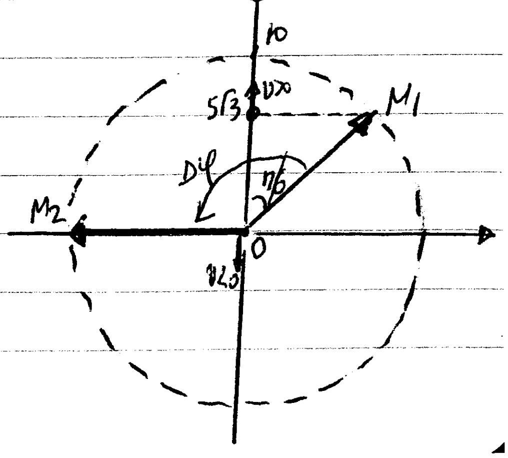
$υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $υ^2=ω^2A^2-ω^2x^2$ ή $ω=\frac{υ}{\sqrt{A^2-x^2}}$ ή $ω=10\frac{rad}{s}$

άρα $x=0,10ημ(10t+\frac{2π}{3})$ και $υ=1συν(10t+\frac{2π}{3})$ (SI)
γ) Την $t=0$, $x=0,05\sqrt{3}\,m$ άρα $α=-ω^2x$ ή $α=-100(0,05\sqrt{3})$

ή $α=-5\sqrt{3}\,m/s^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dυ}{dt}=-5\sqrt{3}\,m/s^2}$

1.9.64. α) ... στρεφόμενο διάνυσμα
$Δφ=ωΔt$ ή $\frac{π}{6}+\frac{π}{2}=ωΔt$ ή

$ω=\frac{2π/3}{4/60}$ ή $ω=10π\frac{rad}{s}$



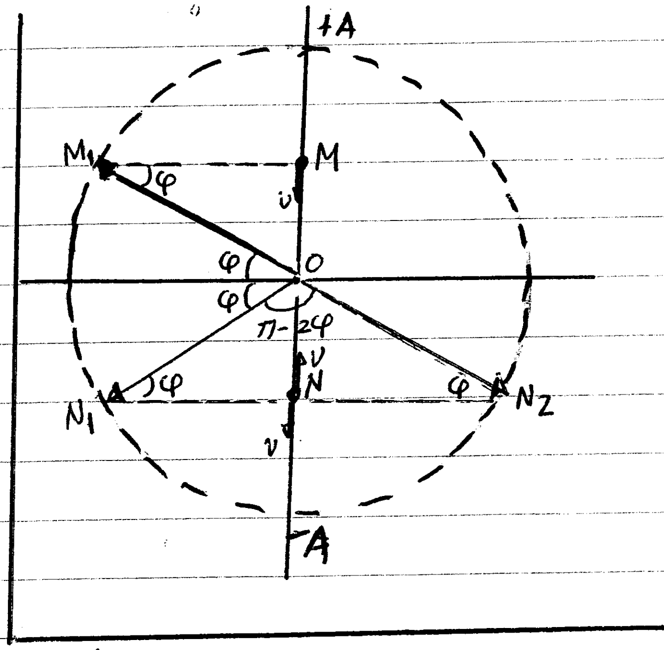
$x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow 5\sqrt{3} = 10\eta\mu(10\pi\frac{1}{60}+\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, ... άρα

$x = 0{,}10\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{6})$ και $v = 3{,}14\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{\pi}{6})$ (S.I.)

β) $x=0{,}1\eta\mu(10\pi\frac{7}{60}+\pi/6) \Rightarrow x=-0{,}05\sqrt{3}\,m$, $D=m\omega^2 \Rightarrow D=800\,N/m$

$\Sigma F=-Dx \Rightarrow \Sigma F=-800(-0{,}05\sqrt{3})\,N \Rightarrow \Sigma F=40\sqrt{3}\,N$

1.9.65. α) Από τη σχέση $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ φαίνεται ότι για συμμετρικές θέσεις $\pm x$ έχουμε το ίδιο μέτρο ταχύτητας



βi) Από τη γεωμετρία του σχήματος φαίνεται ότι οι θέσεις $\vec{OM_1}$ και $\vec{ON_2}$ είναι αντιδιαμετρικές άρα

$\frac{T}{2}=t_1+t_2 \Rightarrow T=12\,s$

$2\varphi=\omega t_1 \Rightarrow \varphi=\frac{\omega t_1}{2} \Rightarrow$

$\varphi=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{t_1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}\,rad$

$\eta\mu\varphi=\frac{OM}{OM_1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{10}{A} \Rightarrow A=20\,cm \Rightarrow A=0{,}2\,m$

ii) $x=0{,}2\eta\mu(\frac{2\pi}{12}t) \Rightarrow x=0{,}2\eta\mu(\frac{\pi}{6}t) \Rightarrow x_M=0{,}2\eta\mu(\frac{\pi}{6}t_1) \Rightarrow$

$0{,}1=0{,}2\eta\mu(\frac{\pi}{6}t_1)$ ... $t_1=1\,s$

Όμοια $x_N=0{,}2\eta\mu(\frac{\pi}{6}t_2) \Rightarrow t_2=7\,s$

1.9.66. α) $x=0{,}1\eta\mu(10t)$, $v=1\sigma\upsilon\nu(10t)$ και $a=-10\eta\mu(10t)$ (S.I.)

$v_{max}=1\,m/s$ τη στιγμή $t=0$, $a_{max}=10\,m/s^2$ την $t=\frac{T}{4}$

β) $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2} \Rightarrow v^2=(\omega A)^2-\omega^2x^2 \Rightarrow v^2=v_{max}^2-\omega^2x^2 \Rightarrow \omega^2x^2=v_{max}^2-\frac{v_{max}^2}{4}$

$\Rightarrow \omega^2x^2=\frac{3v_{max}^2}{4} \Rightarrow \omega^2x^2=\frac{3}{4}\omega^2A^2 \Rightarrow x=\pm\frac{A\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\pm0{,}05\sqrt{3}\,m$

$v=1\sigma\upsilon\nu(10t) \Rightarrow \frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu(10t_1) \Rightarrow 10t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1=\frac{\pi}{30}\,s$

1.9.67 α) Επειδή την $t=0$ έχουμε $x=0$ και $υ<0$ ... $φ_0=π$

$F_{max}=mω^2A$ και $υ_0=ωA$ οπότε $\frac{F_{max}}{υ_0}=mω$ ή $\frac{8}{4}=1ω$

ή $ω=2\ rad/s$

$υ_0=ωA \Rightarrow A=\frac{υ_0}{ω}$ ή $A=2m$

β) $x=2ημ(2t+π)$ γ) $D=mω^2=4\ N/m$, $ΣF=-Dx$ ή

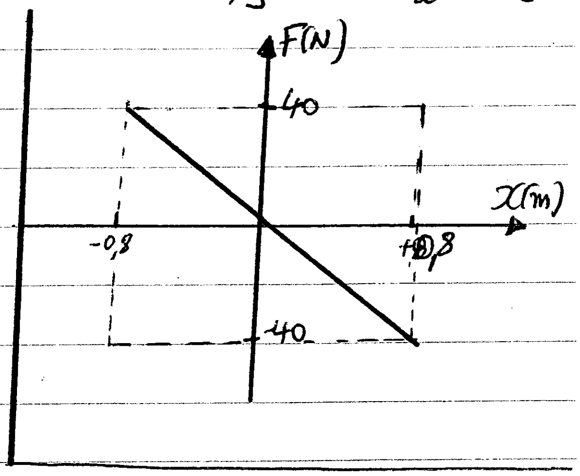
$ΣF=-8ημ(2t+π)$ (1)

δ) $υ=4συν(2t+π)$ ή $\pm2=4συν(2t+π)$ ... οπότε παίρνουμε

$t_1=\frac{π}{6}s$, $t_2=\frac{2π}{6}s$, $t_3=\frac{4π}{6}s$, $t_4=\frac{5π}{6}s$.

ε) Με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) παίρνουμε $ΣF=\pm4\sqrt{3}N$

1.9.68 $F_{max}=D.A$ ή $D=50\frac{N}{m}$, $D=mω^2$ ή $ω=5\ rad/s$ και $T=\frac{2π}{ω}$ ή $T=\frac{2π}{5}s$



α) $A=0,8m$, $T=\frac{2π}{5}s$

β) $υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $υ^2=(ωA)^2-(ωx)^2$ ή

ή $υ^2=υ_0^2-(ωx)^2$ ή $(\frac{υ_0}{2})^2=υ_0^2-(ωx)^2$ ή

$(ωx)^2=\frac{3υ_0^2}{4}$ ή $ω^2x^2=\frac{3ω^2A^2}{4}$ ή $x=\pm\frac{A\sqrt{3}}{2}$ ή

ή $x=\pm0,4\sqrt{3}m$ και επειδή $υ>0$ και $α<0$

$x>0$ δηλ. $x=+0,4\sqrt{3}m$

γ) $x=0,8ημ(5t+φ_0) \xrightarrow{t_0=0} 0,4\sqrt{3}=0,8ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε

$φ_0=\frac{π}{3}$ και $φ_0=\frac{2π}{3}$. και επειδή $υ>0$ δεκτή η $φ_0=\frac{π}{3}$.

$x=0,8ημ(5t+\frac{π}{3})$ και $υ=4συν(5t+\frac{π}{3})$

δ) $υ=4συν(5t+\frac{π}{3}) \Rightarrow -4=4συν(5t_1+\frac{π}{3})$ ή ... $t_1=\frac{2π}{15}s$

1.9.69 α) $x=0,6ημ(10πt+φ_0)$ ή $0,3\sqrt{2}=0,6ημφ_0$ και

επειδή $υ<0$ $φ_0=\frac{3π}{4}$

$x=0,6ημ(10πt+\frac{3π}{4})$ και $υ=6πσυν(10πt+\frac{3π}{4})$ (S.I)

β) $υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ ή $υ=\pm3π\sqrt{3}\ m/s$

γ) $\frac{dP}{dt}=ΣF=-Dx=-mω^2x$ ή $\frac{dP}{dt}=600\sqrt{2}N$

δ) $P_{max}=m υ_{max}=12π\ kg\ m/s$, $(\frac{dP}{dt})_{max}=ΣF=DA$ ή $(\frac{dP}{dt})_{max}=1200\ kg\ m/s^2$

P_{max} όταν v_{max} ... $t_1 = \frac{1}{40}$ s και $t_2 = \frac{5}{40}$ s

$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{max}$ όταν ΣF_{max} όταν x_{max} ... $t_3 = \frac{3}{40}$ s και $t_4 = \frac{7}{40}$ s

1.9.70 α) $x_1 = 0,2ημ(10πt + \frac{π}{2}) \Rightarrow x_1 = 0,2συν(10πt)$
$x_2 = 0,2ημ(10πt + π) \Rightarrow x_2 = -0,2ημ(10πt)$ } όταν συναντώνται προφανώς $x_1 = x_2$

$\Rightarrow 0,2συν(10πt) = -0,2ημ(10πt) \Rightarrow εφ(10πt) = -1 \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} 10πt = 2κπ + π - π/4 \\ 10πt = 2κπ - π/4 \end{array} \right\} \Rightarrow 10πt = κπ - \frac{π}{4}$ και προφανώς η συνάντηση γίνεται τη χρονική στιγμή $t = \frac{3}{40}$ s

β) Η συνάντηση γίνεται στη θέση $x_1 = 0,2συν(10πt) \Rightarrow$
$x_1 = 0,2συν(10π\frac{3}{40}) \Rightarrow x_1 = -0,1\sqrt{2}$ m

γ) $Δx = |x_1 - x_2| = |0,2συν(10πt) + 0,2ημ(10πt)| \Rightarrow$

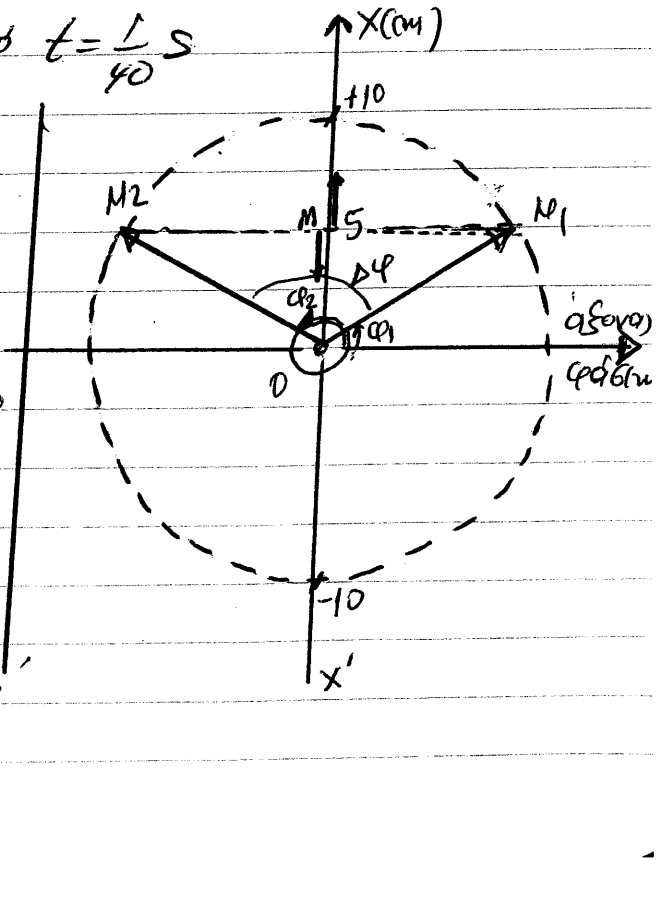
$Δx = 0,2 \left| συν(10πt) + \frac{ημ(π/4)}{συν(π/4)} ημ(10πt) \right| \Rightarrow$

$Δx = 0,2 \frac{|συν(10πt - π/4)|}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow Δx = 0,2\sqrt{2}συν(10πt - \frac{π}{4})$

άρα $Δx_{max} = 0,2\sqrt{2}$ m

δ) $Δx_{max}$ όταν $|συν(10πt - \frac{π}{4})| = 1 \Rightarrow συν(10πt - \frac{π}{4}) = \pm 1$

$\Rightarrow 10πt - \frac{π}{4} = κπ \Rightarrow 10πt = \frac{π}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{40}$ s



1.9.71 α) Οι ταλαντωτές συναντιούνται στη θέση $x_M = +5$ cm. Τη στιγμή της συνάντησης οι δύο ταλαντωτές έχουν φάσεις $φ_1 = 2κπ + \frac{π}{6}$ με $v > 0$ και $φ_2 = 2κπ + \frac{5π}{6}$ με $v < 0$. Η διαφορά φάσης είναι $Δφ = φ_2 - φ_1 \Rightarrow Δφ = \frac{2π}{3}$ rad

β) $x_1 = 0,10ημ(200πt)$ και
$x_2 = 0,10ημ(200πt + \frac{2π}{3})$

δ) όταν οι ταλαντωτές συναντιούνται $x_1 = x_2$ ή
$ημ(200πt) = ημ(200πt + \frac{π}{3})$ ή $ημ(200πt + \frac{π}{3}) - ημ(200πt) = 0$
ή $2ημ\frac{π}{3}\,συν(200πt + \frac{π}{3}) = 0$ ή $συν(200πt + \frac{π}{3}) = 0$ ή
$200πt + \frac{π}{3} = κπ + \frac{π}{2}$
$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } κ=0, \ldots\ t_1 = \frac{1}{1200}\,s \\ \text{Για } κ=1, \ldots\ t_2 = \frac{7}{1200}\,s \end{array}\right\} \Rightarrow Δt = t_2 - t_1 \text{ ή } Δt = \frac{1}{200}\,s$$

1.9.72. α) $Δφ = \frac{π}{3}t - \frac{π}{5}t = \frac{π}{2}$ ή $\frac{2}{15}t = \frac{1}{2}$ ή $t = 3{,}75\,s$

β) Αν οι ταλαντώσεις παρασταθούν ως στρεφόμενα διανύσματα όταν θα συναντηθούν για πρώτη φορά το ένα διάνυσμα έχει γράψει μια επιπλέον στροφή
$Δφ = 2π$ ή $\frac{π}{3}t - \frac{π}{5}t = 2π$ ή $t = 15\,s$. Με αντικατάσταση στις εξισώσεις βρίσκουμε $x_1 = x_2 = 0 \ldots$ (θέση ισορροπίας)

γ) Όταν θα ξανασυναντηθούν στην αρχή κάθε στρεφόμενο διάνυσμα έχει διαγράψει ακέραιο αριθμό στροφών κ και λ αντίστοιχα. Έτσι
$φ_1 = κ \cdot 2π$ ή $\frac{π}{3}t = κ2π$ και $φ_2 = λ2π$ ή $\frac{π}{5}t = λ2π$

$\frac{\frac{π}{3}t}{\frac{π}{5}t} = \frac{κ2π}{λ \cdot 2π}$ ή $\frac{κ}{λ} = \frac{5}{3}$ και επειδή $κ, λ \in Z^+$ $κ = 5$ και $λ = 3$

Δηλαδή τα μέσα έχουν διαγράψει 5 και 3 περιόδους αντίστοιχα
$t = κT_1$ ή $t = 5 \cdot T_1$ ή $t = 5\frac{2π}{ω_1} = 5\frac{2π}{π/3}$ ή $t = 30\,s$

1.9.73 α)
$$\left.\begin{array}{l} ημφ_1 = \frac{10\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ ή } φ_1 = \frac{π}{6} \\ ημφ_2 = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } φ_2 = \frac{π}{4} \end{array}\right\} Δφ = φ_2 - φ_1 \text{ ή } Δφ = \frac{π}{12}\,rad$$

β) Στις διαδοχικές συναντήσεις τα διανύσματα είναι σε αντιδιαμετρικές θέσεις, άρα

$\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $T = 2\Delta t$ ή

$T = 4s$

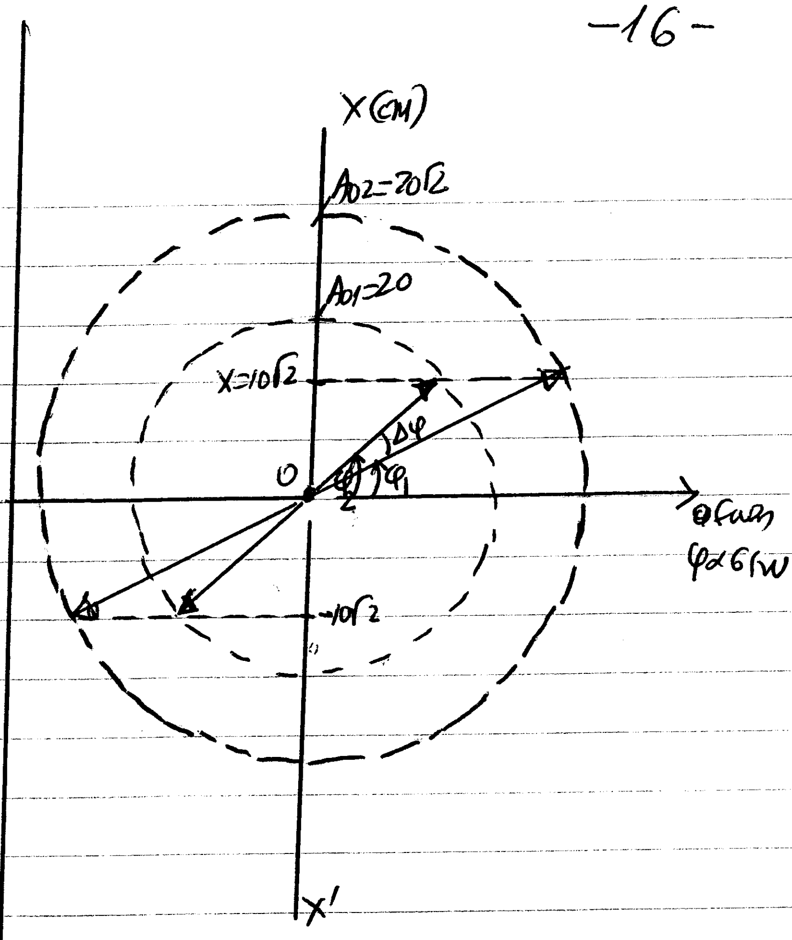
δ) $y_1 = 0{,}2\,ημ\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$

$y_2 = 0{,}2\sqrt{2}\,ημ\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)$

ή $y_2 = 0{,}2\sqrt{2}\,ημ\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{12}\right)$

$υ_1 = 0{,}1\pi\,συν\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$

$υ_2 = 0{,}1\sqrt{2}\pi\,συν\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{12}\right)$



2. Η ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή

2.2.5 δ 2.2.6 β 2.2.7 β 2.2.8 γ 2.2.9 β

2.2.10 Α-δ, Β-γ, Γ-δ 2.2.11 Α-γ, Β-β

2.2.12 Α-γ, Β-β 2.2.13 ε

2.2.14 Α-γ, Β-α, Γ-δ, Δ-β 2.2.15 δ 2.2.16 δ

2.2.17 γ 2.2.18 γ 2.2.19 β 2.2.20 Α-α, Β-δ

2.2.21 β 2.2.22 Α-α, Β-γ, Γ-β, Δ-γ

2.2.23 α 2.2.24 Α-γ, Β-δ.

2.2.25.

x	-A	-A/2	0	+A/4	+A
U(J)	6,4	1,6	0	0,4	6,4
K(J)	0	4,8	6,4	6,0	0
$E_{ολ}$(J)	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4

2.2.26

ταχύτητα (υ)	$-υ_0$	$-\frac{υ_0}{2}$	υ=0	$+υ_0/3$	$+υ_0$
U(J)	0	2,7	3,6	3,2	0
K(J)	3,6	0,9	0	0,4	3,6
$E_{ολ}$(J)	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6

2.2.27. Α.1 Σωστό. Αρχική ενέργεια $E=\frac{1}{2}DA^2$, Τελική ενέργεια $E'=\frac{1}{2}D(2A)^2$ ή $E'=4E$, $K'_{max}=E'=4E=4K_{max}$.

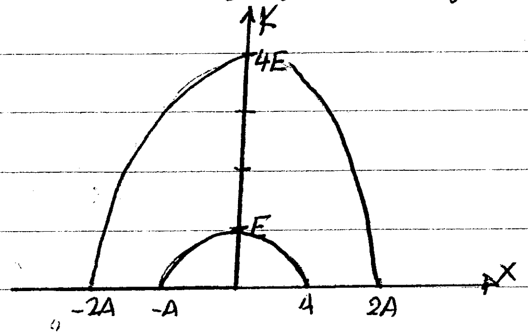
Α.2. Λάθος · Η περίοδος $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη του πλάτους.

Β. $K=E-\frac{1}{2}Dx^2$, $-A\le x\le +A$

$K'=E'-\frac{1}{2}Dx^2$ ή

$K'=4E-\frac{1}{2}Dx^2$, $-2A\le x\le +2A$

... παραβολές



2.2.28. $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}D\frac{A^2}{4}=\frac{E}{4}$, $K=E-U$ ή $K=\frac{3E}{4}$, $\frac{K}{U}=3$ άρα

α-λάθος, β-λάθος, γ-σωστή

2.2.29 $E=\frac{1}{2}mu_0^2$, $E'=\frac{1}{2}m(2u_0)^2=4E$, $\Delta E=3E$, $\frac{\Delta E}{E}=3$, άρα αύξηση 300%

Σωστή η πρόταση (α)

2.2.30. Αρχική κινητική μέγιστη ενέργεια $K_{max}=\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}DA^2=E_0$.

Α) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος $K'_{max}=E'=\frac{1}{2}D(2A)^2=4E_0=4K_{max}$ άρα λάθος

Β) Αν διπλασιάσουμε την $u_{max}=2u_0$, $K'_{max}=E'=\frac{1}{2}m(2u_0)^2=4E_0=4K_{max}$, άρα λάθος

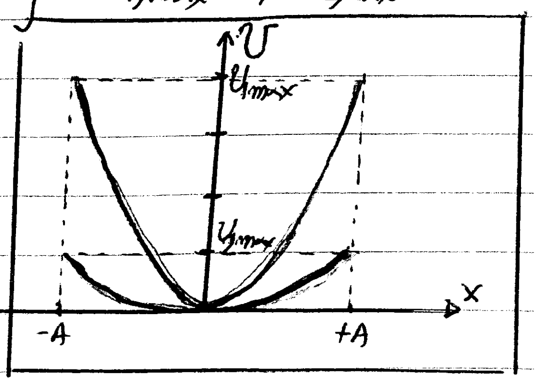
Γ) Αν προσφέρουμε ενέργεια E_0, $K'_{max}=E'=E_{αρχική}+E_{προσφερόμενη}$ ή

$K'_{max}=E_0+E_0$ ή $K'_{max}=2E_0=2K_{max}$, άρα σωστή

... Σωστή η πρόταση (Γ.)

2.2.31. α) $U_{1,max}=K_{1,max}=\frac{1}{2}mu_1^2=\frac{1}{2}m4u_2^2=4U_{2,max}$

$U_{2,max}=K_{2,max}=\frac{1}{2}mu_2^2$ $\Rightarrow U_{1,max}=4U_{2,max}$



β) ... παραβολές

$U_1=\frac{1}{2}D_1x^2$ $\quad -A\le x\le +A$

$U_2=\frac{1}{2}D_2x^2$ $\quad -A\le x\le +A$

$U_{1,max}=4U_{2,max}$

γ) $U_{1,max}=4U_{2max}$ ή $\frac{1}{2}D_1A^2=4\frac{1}{2}D_2A^2$ ή $D_1=4D_2$ ή $m\omega_1^2=4m\omega_2^2$ ή

$\omega_1=2\omega_2$ ή $\frac{2\pi}{T_1}=2\frac{2\pi}{T_2}$ ή $T_2=2T_1$

2.2.32. $x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ή $x = A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$, $U = \frac{1}{2}Dx^2 = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$ και
$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega A\eta\mu(\omega t + \pi)$ ή $\upsilon = -\omega A\eta\mu(\omega t)$ ή $\upsilon = -\frac{2\pi}{T}A\eta\mu(\frac{2\pi}{T}t)$
άρα σωστές οι προτάσεις A.1, B.1

2.2.33. A) Σωστή η πρόταση A.1. Περίοδος μεταβολής της U, $T = 0{,}2s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 5Hz$
B) $U = 10\eta\mu^2(5\pi t)$
Γ) $U = E\eta\mu^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t) = \frac{1}{2}D(\pm A\eta\mu(\omega t))^2 = \frac{1}{2}Dx^2$
άρα $x = A\eta\mu(\omega t)$ ή $x = -A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu(\omega t + \pi)$
Σωστή η πρόταση 3.

2.2.34 1) $K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A A = \frac{1}{2}m\alpha_0 A = \frac{1}{2}m\alpha_{max}A$. άρα Σωστή.
2)
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW}{dt} = -\frac{\Sigma F dx}{dt} = -\Sigma F\upsilon = +Dx\upsilon = DA\eta\mu(\omega t)\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$
ή $\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}DA\upsilon_0\eta\mu(2\omega t)$ άρα $\left(\frac{dU}{dt}\right)_{max} = \frac{1}{2}DA\upsilon_0 = \frac{1}{2}m\omega^2A\upsilon_0$
ή $\left(\frac{dU}{dt}\right)_{max} = \frac{1}{2}m\,\alpha_{max}\upsilon_{max}$, άρα η πρόταση είναι σωστή.

2.2.35. α) $E = \frac{1}{2}DA^2 = 4J$ β) $U_{max} = K_{max} = E = 4J$ γ) K_{max} τις $t = 0$ και $t = \frac{T}{2}$
U_{max} τις $t = \frac{T}{4}$ και $t = \frac{3T}{4}$
δ) $U = 4\eta\mu^2(10t)$, $K = 4\sigma\upsilon\nu^2(10t)$
ε) $K = U = \frac{E}{2}$ ή $\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$ ή $x = \pm 0{,}1\sqrt{2}\,m$
$x = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \pm\frac{A\sqrt{2}}{2} = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \eta\mu(\omega t) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\omega t = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ από όπου
$t = \frac{T}{8}, \frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}$

2.2.36. α) $\frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$ από όπου $D = 500\,N/m$ και $D = m\omega^2$
ή $\omega = 10\,rad/s$. $E_{ολ} = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$ ή $E_{ολ} = 6250J$
$E_{ολ} = \frac{1}{2}DA^2$ ή $A = 5m$, $\omega = 2\pi f$ ή $f = 5/\pi\ Hz$
β) $E_{ολ}$ = σταθερή $\forall x, t$ άρα $E_{ολ} = 6250J$.
$U = \frac{1}{2}Dx^2 = 1000J$, $K = E - U = 5250J$
γ) $x = 5\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{t = T/6} x = 5\eta\mu(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6} + \frac{\pi}{6})$ ή $x = 5m \ldots x = +A$

$U = U_{max} = E_{ολ} = 6250J$ και $K = 0$

2.2.37 α) $\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = \frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}Dx^2} - 1 = \left(\frac{A}{x}\right)^2 - 1 = \dots = 15$ ή $\frac{K}{U} = 15$

β) $\frac{U}{E} = \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2} = \dots = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ ποσοστό δυναμικής 6,25%

ποσοστό κινητικής 93,75%

2.2.38 α) $x = A\eta\mu(\omega t) \xrightarrow{t=T/6} x = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6}\right) = A\sqrt{3}/2$

$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = \frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}Dx^2} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

β) $x = A\eta\mu(\omega t) = \xrightarrow{t=T/3} x = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = A\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{K}{E} = \frac{E-U}{E} = 1 - \frac{U}{E} = 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 - \left(\frac{A\sqrt{3}/2}{A}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Άρα ποσοστό κινητικής ενέργειας 25%.

2.2.39

$\frac{U}{E} = \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \left(\frac{0{,}2}{0{,}8}\right)^2 = \frac{1}{16}$ ή

$U = \frac{E}{16} = \dots = 0{,}3J$

όμοια για $x = 0{,}4m$

βρίσκουμε $U = 1{,}2J$

x(m)	-0,8	-0,4	0	+0,2	+0,8
K(J)	0,00	3,60	4,80	4,50	0,00
U(J)	4,80	1,20	0,00	0,30	4,80
E(J)	4,80	4,80	4,80	4,80	4,80

2.2.40. $x = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6}\right) = A\sqrt{3}/2$

$x = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = A$

$x = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{7T}{12}\right) = -A/2$

$E_{ολ} = \frac{1}{2}DA^2 = 7{,}2J$

$\frac{U}{E_{ολ}} = \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2} = \left(\frac{x}{A}\right)^2$ (1)

Από τη σχέση (1) για $x = A\sqrt{3}/2$ βρίσκουμε $U = 5{,}4J$ και για $x = -\frac{A}{2}$, $U = 1{,}8J$

t	0	T/6	T/4	7T/12	T
X(m)	0	$\frac{A\sqrt{3}}{2} = 0{,}6\sqrt{3}$	1,2	-0,6	0
K(J)	7,20	1,80	0,00	5,40	7,20
U(J)	0,00	5,40	7,20	1,80	0,00
$E_{ολ}$(J)	7,20	7,20	7,20	7,20	7,20

2.241

x	$x=0$	x_1	x_2	$x=+A$
K(J)	5	2	1	0
U(J)	0	3	4	5
E(J)	5	5	5	5

2.242. A. α) $E=\frac{1}{2}DA^2=50J$

β) $x=A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{t=0} x=A/2$, $U=\frac{1}{2}D(A/2)^2=12,5J$ και $K=37,5J$

B. α) $\frac{1}{2}Dx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}DA^2$ ή $x=\sqrt{\frac{DA^2-mv^2}{D}}$ ή $x=\pm 0,8m$

β) $\frac{dv}{dt}=a=-\omega^2 x$ ή $\frac{dv}{dt}=\pm 80 m/s^2$

Γ. $x=A\eta\mu(\omega t+\pi/6)$ ή $x=1\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})$, $U=\frac{1}{2}Dx^2$ ή $U=50\eta\mu^2(10t+\frac{\pi}{6})$
και $K=50\sigma\upsilon\nu^2(10t+\frac{\pi}{6})$

Δ. α) $U=\frac{1}{2}Dx^2=18J$ άρα $K=E-U$ ή $K=32J$

β) $K=\frac{1}{2}mv^2$ από όπου $v=\sqrt{2K/m}=\sqrt{\frac{2\cdot 32}{1}}$ ή $v=\pm 8m/s$

$\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}=-\frac{dW}{dt}=-\frac{\Sigma F dx}{dt}=Dxv$ ή $\frac{dU}{dt}=100\cdot(+0,6)(\pm 8)$ ή $\frac{dU}{dt}=\pm 480J/s$

E. $W=\Delta K=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho}=(E-U_{\tau\varepsilon\lambda})-(E-U_{\alpha\rho\chi})=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή
$W=\frac{1}{2}Dx_{\alpha\rho\chi}^2-\frac{1}{2}Dx_{\tau\varepsilon\lambda}^2$ ή $W=10J$

2.243 A) $\left.\begin{array}{l} E_{o\lambda}=\frac{1}{2}DA^2 \\ F_{max}=DA \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_{o\lambda}}{F_{max}}=\frac{A}{2}$ ή $A=0,5m$

$F_{max}=DA$ ή $D=4N/m$

$D=m\omega^2$ από όπου $m=\frac{D}{\omega^2}$ ή $m=\frac{4}{(100\pi)^2}$ ή $m=4\cdot 10^{-5}kg$

B) $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{t=0} 0,25=0,50\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}$ από όπου
$\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ και $\varphi_0=\frac{5\pi}{6}$ δεκτή αφού $v<0$, άρα
$x=0,50\eta\mu(100\pi t+5\pi/6)$ και $v=50\pi\sigma\upsilon\nu(100\pi t+\frac{5\pi}{6})$ (SI)

Γ) $x=0,50\eta\mu(100\pi t+\frac{5\pi}{6}) \xrightarrow{t=1/100s} x=-0,25m$
$U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-0,25)^2$ ή $U=0,125J$
$K=E-U$ ή $K=0,375J$